



F dérive d'un potentiel?

$$\text{rot } \vec{F} \stackrel{?}{=} 0$$

Ω simplement
convexe?

On trouve un
potentiel en
intégrant?

On trouve T
régulière, fermée
t.q. $\int_T F \cdot dl \neq 0$?

OUI
(Donner un
potentiel)

NON

oui

oui

oui

non

non

non

oui

non

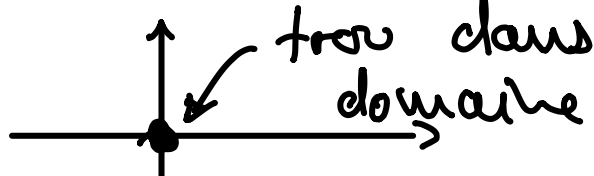
Exemple 2.14

(i) $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

Dérive d'un potentiel?

Étape 1: $\text{rot } F$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{x^2+y^2} \right] = \frac{x^2+y^2 - x \cdot (2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{y}{x^2+y^2} \right] = -\frac{x^2+y^2 - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \text{rot } F = 0$$

Étape 2  trou dans le domaine $\Rightarrow \Omega$ n'est pas simpl. connexe.

Étape 3: La courbe!

Γ = cercle unité centré en $(0,0)$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{t} = \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right); (-\sin t, \cos t) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \text{ ne d\u00e9rive pas d'un potentiel}$$

\u00c9tape 3: Cherchons un potentiel f :

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}}_{\text{}}.$$

Feinte du bison $x = x \cdot \frac{y}{y}$
--

$$\Rightarrow f(x, y) = \int^x -\frac{y}{t^2+y^2} dt + \alpha(y) \stackrel{y \neq 0}{=} \int^x \frac{-y}{t^2+y^2} \frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y^2}} dt + \alpha(y)$$

$$= \int^x \frac{1}{(\frac{t}{y})^2+1} \frac{1}{y} dt + \alpha(y) \stackrel{\substack{t=y \\ ds = \frac{dt}{y}}}{=} - \int^{\frac{x}{y}} \frac{1}{s^2+1} ds + \alpha(y)$$

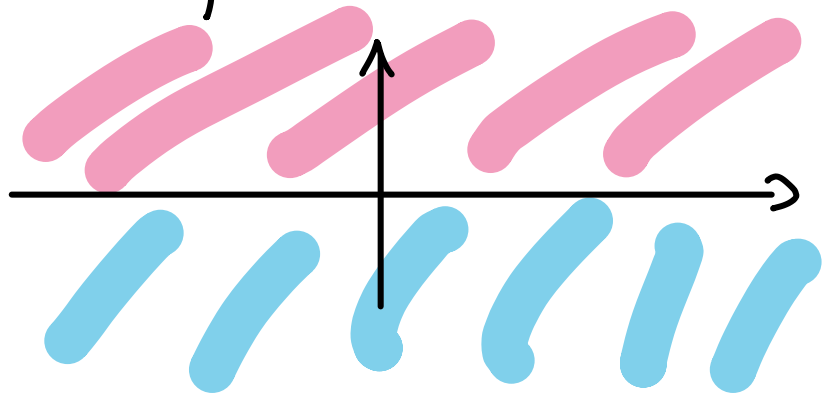
$$= -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \alpha(y)$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \vec{F}_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \alpha(y) \right]$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \alpha'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \alpha'(y)$$

$$\Rightarrow \alpha' = 0 \Rightarrow \alpha = \text{const.}$$

$\Rightarrow f(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \text{const}$ sont les potentiels de F .



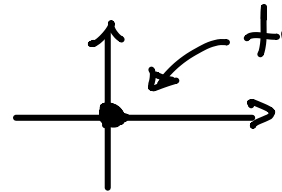
(ii) $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} + 1 \right)$

Dérive d'un potentiel?

Étape 1: $\text{rot } F$:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y}{x^2+y^2} + 1 \right] = - \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{x^2+y^2} \right] = - \frac{x}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Étape 2:  Ω n'est pas simplement connexe.

Étape 3: Cherchons un potentiel!

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + 1$$

primitive par rapport à x !

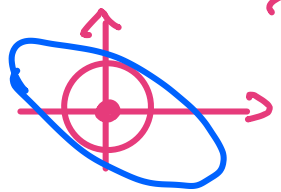
$$f(x, y) = \int^x \frac{t}{t^2 + y^2} dt + \alpha(y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \alpha(y)$$

$$\frac{y}{x^2 + y^2} \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \alpha(y) \right] = \frac{y}{x^2 + y^2} + \alpha'(y)$$

$$\Rightarrow \alpha'(y) = 1 \Rightarrow \alpha(y) = y + C$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + y + C$$

Quid des courbes?



$\vec{\gamma}$ = cercle unité,

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

tester une 2^{ème} courbe autour du même trou ne sert à rien!

$$(iii) \quad F(x, y, z) = \left(\frac{zx - y}{x^2 + y^2}, \frac{zy + x}{x^2 + y^2}, z^2 + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \right)$$

Dérive d'un potentiel?

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 0\}$

$= \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$

Étape 1: $\text{rot } F$:

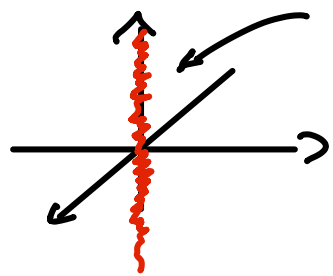
$$(\text{rot } F)_1 : \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{ok!}$$

$$(\text{rot } F)_2 : \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{ok!}$$

$$(\text{rot } F)_3 : \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x(zy + x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - 2x y z - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) - 2y(zx - y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - 2x y z - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{ok!}$$

Étape 2:



Je peux cadenerasser mon vélo ici
 $\Rightarrow$ pas simplement connexe.

Étape 3: Courbe! $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

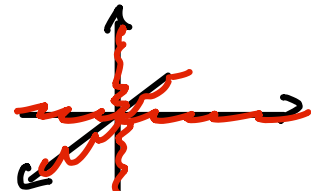
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1}, \frac{1}{2} \log(1) \right); (-\sin t, \cos t, 0) \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 1 \neq 0. \Rightarrow F \text{ ne dérive pas d'un} \\ &\text{potentiel.} \end{aligned}$$

(iv) $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \neq 0, \& x^2 + z^2 \neq 0 \&, y^2 + z^2 \neq 0\}$
 défini par $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x}{(x^2 + z^2)^2}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y}{(y^2 + z^2)^2}, \frac{z}{(x^2 + z^2)^2} + \frac{z}{(y^2 + z^2)^2} \right)$

Étape 1: $\text{rot } F$:

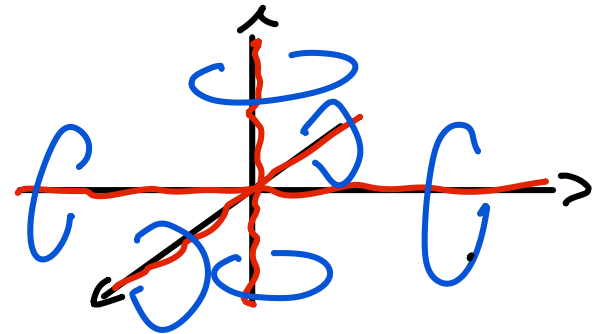
$$(\text{rot } F)_1: \frac{\partial F_3}{\partial y} = -\frac{4yz}{(y^2 + x^2)^3}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{4yz}{(y^2 + z^2)^3} \quad \text{ou}$$

idem pour les deux autres composantes.

Étape 2:  $\rightarrow$ pas simplement connexe.

Étape 3:

Potentiel! $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = F_3$



$$f(x, y, z) = \int \frac{t}{(t^2 + y^2)^2} + \frac{t}{(t^2 + z^2)^2} dt + \alpha(y, z)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + z^2} + \alpha(y, z)$$

$$\frac{y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y}{(y^2+z^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,z)$$

$$\Rightarrow \alpha(y,z) = \int \frac{t}{(t^2+z^2)^2} dt + \beta(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{y^2+z^2} + \beta(z)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2+z^2} + \frac{1}{y^2+z^2} \right) + \beta(z)$$

$$\frac{z}{(x^2+z^2)^2} + \frac{z}{(y^2+z^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{(x^2+z^2)^2} + \frac{z}{(y^2+z^2)^2} + \beta'(z)$$

$$\Rightarrow \beta'(z) = 0, \quad \beta = \text{const}$$

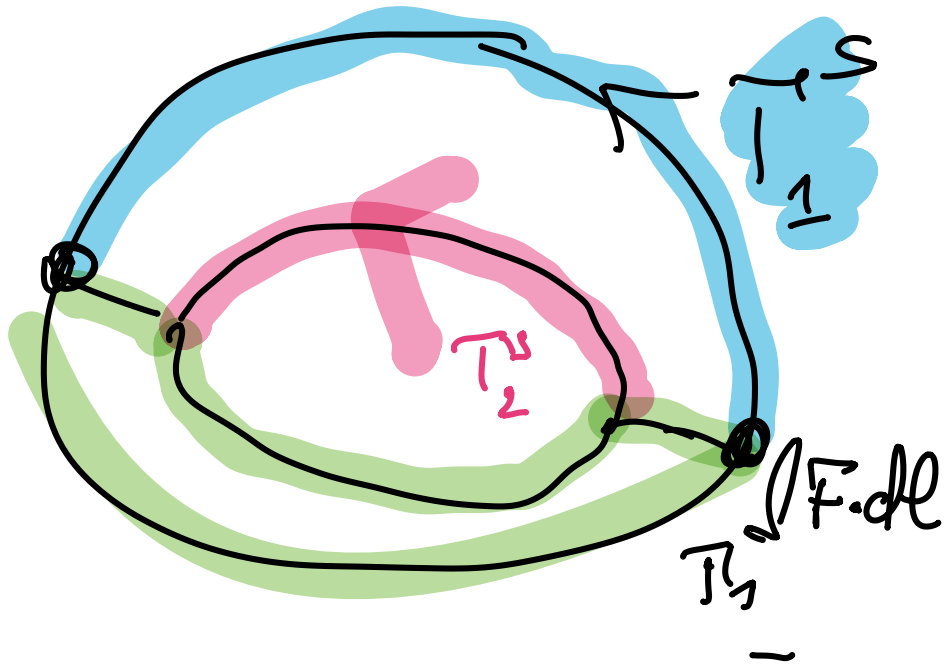
$$\Rightarrow f(x,y,z) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2+z^2} + \frac{1}{y^2+z^2} \right) + C$$

Pourquoi choisir 2 courbes dans $\mathbb{R}^2$ qui entourent la même trou ne sert à rien?



$$\int_{\tilde{T}_2} F \, dl = 0, \quad \int_{\tilde{T}_2} F \, dl = \int_{\tilde{T}_1^s} F \, dl - \int_{\tilde{T}_2^s} F \, dl + \int_{\tilde{T}_{\text{point}}} F \, dl$$

$$\int_{\tilde{T}_2} F \, dl = 0,$$



$$\int_{\tilde{T}_2} F \, dl = \int_{\tilde{T}_1^i} F \, dl - \int_{\tilde{T}_2^i} F \, dl - \int_{\tilde{T}_{\text{point}}} F \, dl$$

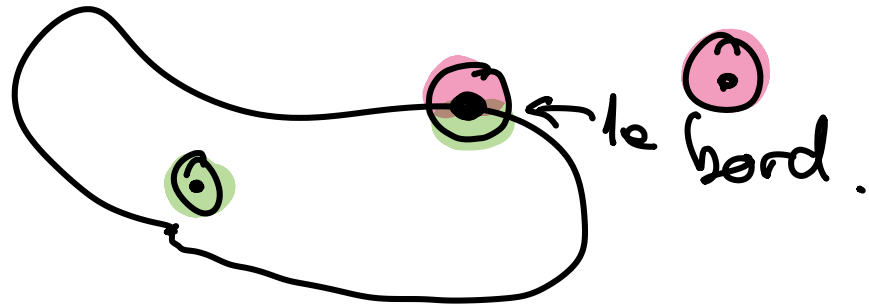
$$\oplus 0 = \int_{\tilde{T}_1^s} F \, dl + \int_{\tilde{T}_2^i} F \, dl - \int_{\tilde{T}_1^s} F \, dl - \int_{\tilde{T}_2^i} F \, dl$$

$$\int_{\tilde{T}_2} F \, dl$$

§ 2.4 Théorème de Green

Définition 2.15: Bord, adhérence, bord orienté positivement & négativement, domaine régulier.

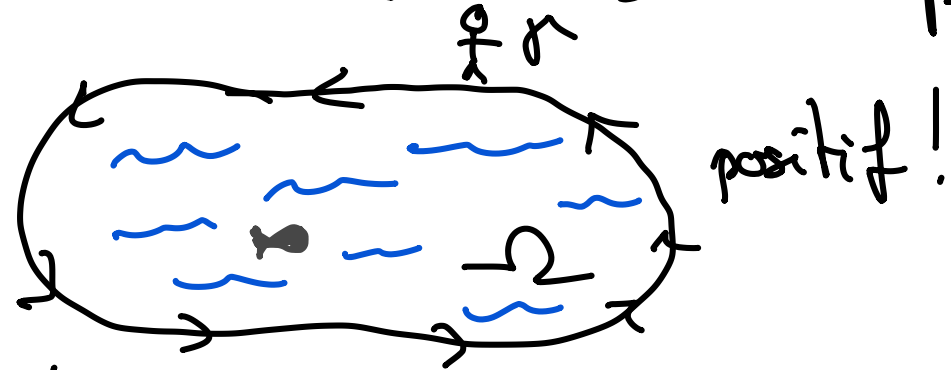
(i) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Le bord de Ω note $\partial\Omega$ est
$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap \Omega^c \neq \emptyset\}$$



On note $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, l'adhérence de Ω

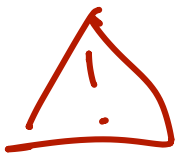
(ii) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est une courbe simple fermée régulière (par morceaux)

Le bord est orienté positivement si on le paramétrise avec γ dont le sens de parcours laisse le domaine à gauche

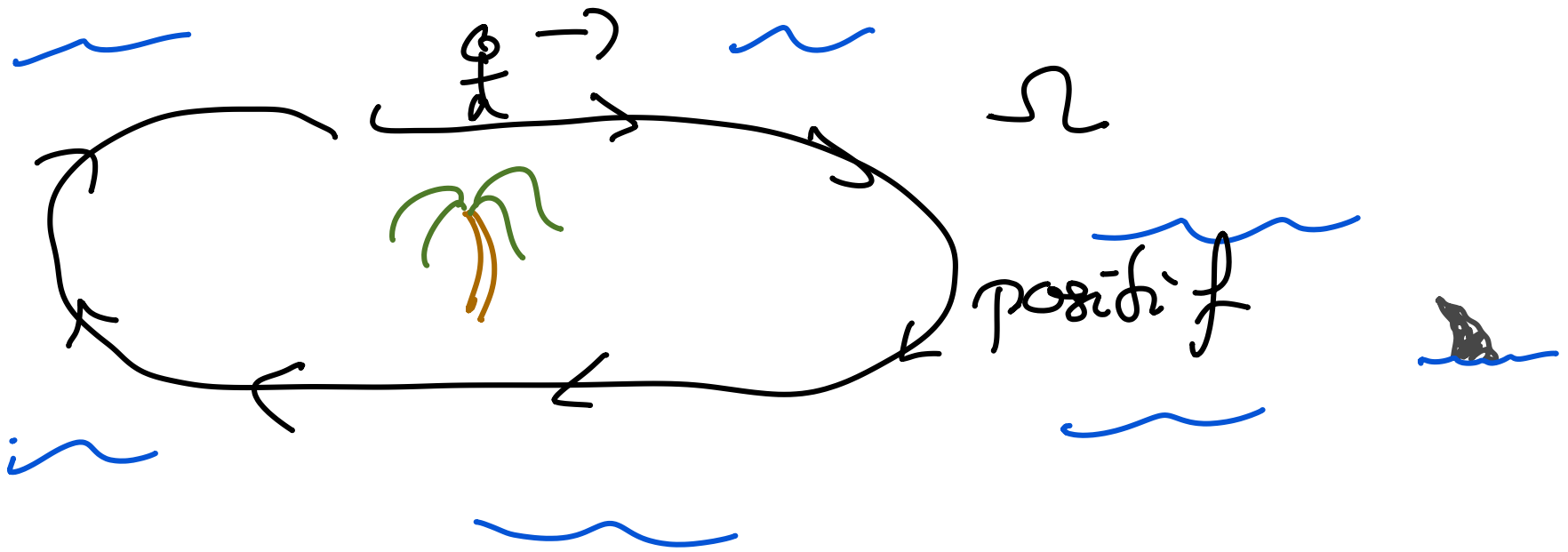


si le sens de parcours laisse le domaine à droite, il est orienté négativement





la notion d'orientation positive / négative pour une courbe Γ , n'a de sens que si Γ est le bord d'un domaine Ω .



(iii) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert borné est un domaine régulier si $\exists \Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ des ouverts bornés tels

- $\forall 1 \leq j \leq m \quad \overline{\Omega_j} \subseteq \Omega_0$
- $\forall 1 \leq i, j \leq m \quad i \neq j, \quad \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset$
- $\Omega = \Omega_0 \setminus \left[\bigcup_{j=1}^m \overline{\Omega_j} \right]$

- $\forall 0 \leq j \leq m, \quad \partial \Omega_j = \Gamma_j$ est une courbe simple fermée régulière.

